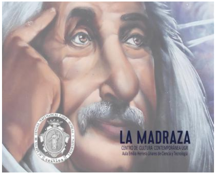
Las Geometrías del Espaciotiempo

Miguel Sánchez Caja

Palacio de La Madraza, Granada

26 de Noviembre de 2015

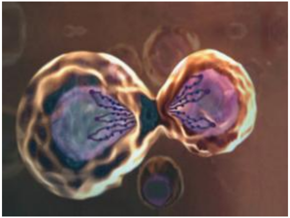


Facultad de Ciencias
Universidad de Granada

Cosas de la adolescencia...

Cosas de la adolescencia...

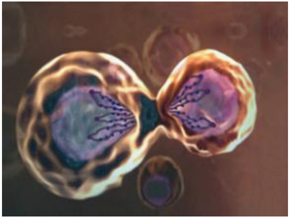
Cuando un organismo unicelular se reproduce por división...



[Imagen: Investigación y Ciencia]

Cosas de la adolescencia...

Cuando un organismo unicelular se reproduce por división...



[Imagen: Investigación y Ciencia]

las dos nuevas células se pelean por cuál es la madre y cuál la hija.

Organismos inmortales

Pero, un momento...:

1. Al dividirse el organismo no murió

Organismos inmortales

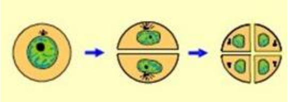
Pero, un momento...:

1. Al dividirse el organismo no murió
2. El periodo de vida de (cualquier) célula hija, incluiría el de la madre

Organismos inmortales

Pero, un momento...:

1. Al dividirse el organismo no murió
2. El periodo de vida de (cualquier) célula hija, incluiría el de la madre



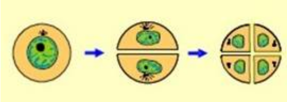
[Imagen: profesorenlinea.cl]

3. ... y el de la abuela

Organismos inmortales

Pero, un momento...:

1. Al dividirse el organismo no murió
2. El periodo de vida de (cualquier) célula hija, incluiría el de la madre



[Imagen: profesorenlinea.cl]

3. ... y el de la abuela
4. ... y el de la abuela de la abuela

Organismos inmortales

¿Desde hace cuánto tiempo vive cada uno de esos seres?

Organismos inmortales

¿Desde hace cuánto tiempo vive cada uno de esos seres?

- Olivos de Palestina

[Imagen: http://www.teletica.com/Noticias/49813]

(presentes en la pasión de Cristo)

Organismos inmortales

- Higuera (ficus religiosa) Bodhi

[Imagen: http://tectonicablog.com/?p=91808]

(288 a.C. *Jaya Sri Maha Bodhi*)

Organismos inmortales

- Pinus longaeva de las Montañas Blancas de Nevada

[Imagen: Wikimedia/commons/5/58/]

(más de 5.000 años, organismos no clonados vivos más antiguos)

Organismos inmortales

¿Desde hace cuánto tiempo viven esos seres?

- Edad de la Tierra: 4,6 millardos de años

[Imagen: www.wonderwhizkids.com/wwkimages/Know-Why/earth-formation.jpg]

- Edad de la célula: unos 4 millardos

Organismos inmortales

¿Desde hace cuánto tiempo viven esos seres?

- Edad de la Tierra: 4,6 millardos de años

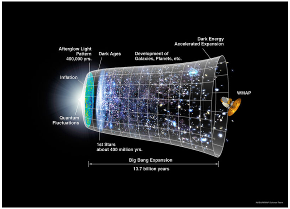
[Imagen: www.wonderwhizkids.com/wwkimages/Know-Why/earth-formation.jpg]

- Edad de la célula: unos 4 millardos

¡Y más o menos eso también vale para nuestras células!

Comparando con la Edad del Universo

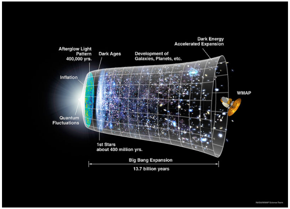
- Edad de la célula: unos 4 millardos
- Edad del Universo: 13,8 millardos



[Imagen: NASA]

Comparando con la Edad del Universo

- Edad de la célula: unos 4 millardos
- Edad del Universo: 13,8 millardos



[Imagen: NASA]

¡Más de la cuarta parte de la existencia de nuestro Universo!

¿Edad de nuestro Universo?

PERO... ¿Tiene sentido preguntarse *científicamente* por la edad del Universo?

¿Edad de nuestro Universo?

PERO... ¿Tiene sentido preguntarse *científicamente* por la edad del Universo?

- ¿Por qué el ser y no la nada?

¿Edad de nuestro Universo?

PERO... ¿Tiene sentido preguntarse *científicamente* por la edad del Universo?

- ¿Por qué el ser y no la nada?
- Dios mueve al jugador y éste la pieza, ¿qué dios detrás de Dios la partida empieza? (Borges, *El ajedrez*)

[Imagen youtube, watch?$v = pzU_G XqYhnQ$]

¿Edad de nuestro Universo?

Relatividad General: sí tiene sentido científico la *edad del espaciotiempo* ("nuestro Universo")...
pero

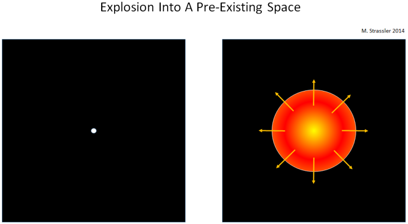
¿Edad de nuestro Universo?

Relatividad General: sí tiene sentido científico la *edad del espaciotiempo* ("nuestro Universo")...
pero inicio del espaciotiempo, difícil de concebir:

¿Edad de nuestro Universo?

Relatividad General: sí tiene sentido científico la *edad del espaciotiempo* ("nuestro Universo")...
pero inicio del espaciotiempo, difícil de concebir:

- **No se parte de espacio vacío** en el que de pronto surgen cosas



[Imagen: http://profmattstrassler.com]

¿Edad de nuestro Universo?

- No experiencia directa: podemos sentirnos más perdidos que los antiguos ante la idea de una Tierra redonda (¿por qué no se caen los que están boca abajo?)

¿Edad de nuestro Universo?

- No experiencia directa: podemos sentirnos más perdidos que los antiguos ante la idea de una Tierra redonda (¿por qué no se caen los que están boca abajo?)

- Sólo las Matemáticas permiten concebir rigurosamente este tipo de posibilidades

Per aspera ad astra

No obstante, tiene su dificultad...:

- El problema de la gravitación me tiene totalmente ocupado, y ahora creo que voy a superar todas las dificultades con ayuda de un amigo matemático de aquí [Grossmann]. Al menos hay una cosa segura, y es que **nunca en mi vida había trabajado tan duro.** He adquirido un gran respeto por las matemáticas, cuyas sutilezas, en mi inocencia, ¡consideraba hasta ahora un lujo superfluo! Al lado de este problema, la primera teoría de la relatividad es un juego de niños.

(Einstein, carta a Sommerfeld)

Geometría, espacio y tiempo

- Galileo: libro de la naturaleza "in lingua matematica"

Geometría, espacio y tiempo

- Galileo: libro de la naturaleza "in lingua matematica"
- Geometría y teorías del espaciotiempo:
    1. Geometría Euclídea / Mecánica Galileo-Newton
    2. Geometría de Lorentz-Minkowski / Relatividad Especial
    3. Geometría Riemanniana / Relatividad General

Geometría, espacio y tiempo

- Galileo: libro de la naturaleza “in lingua matematica”
- Geometría y teorías del espaciotiempo:
  1. Geometría Euclídea / Mecánica Galileo-Newton
  2. Geometría de Lorentz-Minkowski / Relatividad Especial
  3. Geometría Riemanniana / Relatividad General
- Geometría: lenguaje, ambiente, trasfondo de estas teorías. Herramienta con papel clarificador y hasta predictivo

Propósito de la charla

Repaso (matemático) a las teorías del espacio y tiempo

- PARTE I: Aproximación lineal al e.t.
- PARTE II: Espacios y e.t. curvados
- PARTE III: Espaciotiempos en Relatividad General

Primera parte

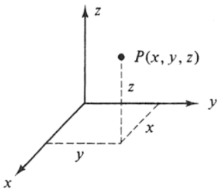
PARTE I: Aproximación lineal al e.t.

- Sistemas de referencia inerciales
- Espaciotiempos compatibles con SRI
- Mecánica clásica (e.t. Galileo-Newton) y Relatividad Especial (e.t Lorentz-Minkowski)

¿Qué es un SRI?

Física elemental: sistemas de referencia inerciales (SRI)

> *SRI: tomamos un reloj y unos ejes coordenados, y asignamos a cada "suceso" (aquí-ahora) cuatro coordenadas (t, x, y, z)*



[Imagen www.prontuariodefisica.blogspot.com.es/2015/08/sistema-de-referencia-eje-coordenado.html]

$\rightsquigarrow$ Simplificamos a dos (t, x): t coord. temporal, x espacial

¿Qué es un SRI?

Consideraciones:

1. "Los SRI no están acelerados ni rotan"
2. "Los puntos de vista de dos SRI son intercambiables"

¿Qué es un SRI?

Esas afirmaciones son muy complicadas para los matemáticos, que prefieren las siguientes DOS CONDICIONES:

Los SRI son "lineales"

(1) Los SRI son "aproximaciones lineales a la totalidad del e.t.": el cambio de coordenadas entre dos de tales SRI es lineal

Si $(t, x), (t', x')$ son sistemas de coordenadas para O, O'

$$t' = at + bx + e$$

$$x' = ct + dx + f$$

esto es:

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

Los SRI son "lineales"

(1) Los SRI son "aproximaciones lineales a la totalidad del e.t.": el cambio de coordenadas entre dos de tales SRI es lineal

Si $(t, x), (t', x')$ son sistemas de coordenadas para O, O'

$$t' = at + bx + e$$

$$x' = ct + dx + f$$

esto es:

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

Esto es, "las segundas derivadas son cero" (no hay rotaciones ni aceleraciones entre ellos)

Los SRI son “democráticos”

(2) Simetría (no privilegio) entre SRI: dado el cambio de coordenadas

$$t' = at + bx + e$$
$$x' = ct + dx + f$$

y su inverso

$$t = a't' + b'x' + e'$$
$$x = c't' + d'x' + f'$$

Los SRI son "democráticos"

(2) Simetría (no privilegio) entre SRI: dado el cambio de coordenadas

$$t' = at + bx + e$$
$$x' = ct + dx + f$$

y su inverso

$$t = a't' + b'x' + e'$$
$$x = c't' + d'x' + f'$$

1. $a = a' (\neq 0)$: el tiempo de O' medido por el reloj de O cambia como el tiempo de O medido por O')

Los SRI son "democráticos"

(2) Simetría (no privilegio) entre SRI: dado el cambio de coordenadas

$$t' = at + bx + e$$
$$x' = ct + dx + f$$

y su inverso

$$t = a't' + b'x' + e'$$
$$x = c't' + d'x' + f'$$

1. $a = a' (\neq 0)$: el tiempo de O' medido por el reloj de O cambia como el tiempo de O medido por O')
2. $d = d'$: el resultado de la medición por O de la unidad espacial de O' es como el de la medición por O' de la unidad espacial de O

Un ejercicio matemático

Calcular todos los cambios de coordenadas como los anteriores.

Un ejercicio matemático

Ejercicio

(Versión selectividad) Considérese una matriz real A regular arbitraria 2×2 y su inversa A^{-1}:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}.$$

Un ejercicio matemático

Ejercicio

(Versión selectividad) Considérese una matriz real A regular arbitraria 2×2 y su inversa A^{-1}:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}.$$

Hállense las que satisfacen:

$$a = a' \ (\neq 0) \qquad d = d'$$

Un ejercicio matemático

Ejercicio

(Versión selectividad) Considérese una matriz real A regular arbitraria 2×2 y su inversa A^{-1}:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}.$$

Hállense las que satisfacen:

$$a = a' \; (\neq 0) \qquad d = d'$$

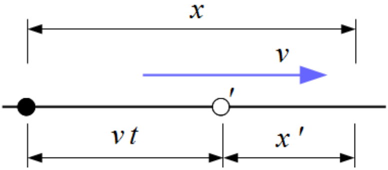
Solucionando el ejercicio se obtienen los posibles cambios de coordenadas entre SRI

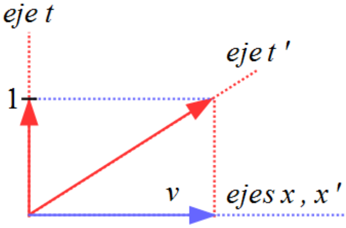
Solución del ejercicio (1)

Se tienen sólo cuatro tipos de soluciones:

- (1) Transformación de Galileo clásica: esencialmente

$$t' = t$$
$$x' = x - vt$$





- v se interpreta como "velocidad" entre los SRI

Solución del ejercicio (2)

- (2) Transformación dual de Galileo: esencialmente

$$x' = x \qquad\qquad t' = t - \lambda x$$

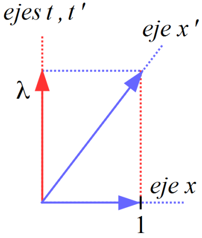
pero...

Solución del ejercicio (2)

- (2) Transformación dual de Galileo: esencialmente

$$x' = x \qquad\qquad t' = t - \lambda x$$

pero... SRI ¡a velocidad 0!

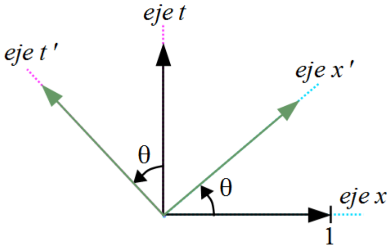


- Matemáticamente análoga, pero físicamente muy especulativa $\rightsquigarrow$ DESCARTADA

Solución del ejercicio (3)

- (3) Transformación euclídea: esencialmente,

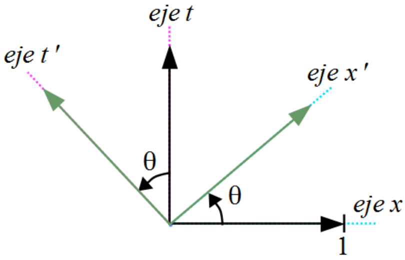
$$\begin{aligned} t' &= \cos\theta \cdot t + \sin\theta \cdot x \\ x' &= -\sin\theta \cdot t + \cos\theta \cdot x \end{aligned}$$



- La coordenada temporal sería "tan espacial" como las otras (¡al crecer t puede decrecer t'!) $\rightsquigarrow$ especulativo

Solución del ejercicio (3)

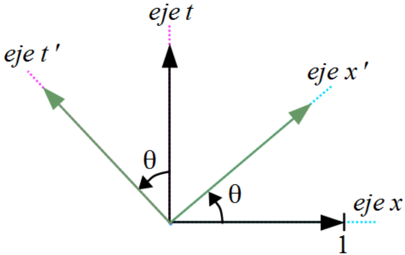
- (3) Transformación euclídea: esencialmente,



- Las cuatro coordenadas se transformarían entre sí como en una geometría euclídea tetradimensional

Solución del ejercicio (3)

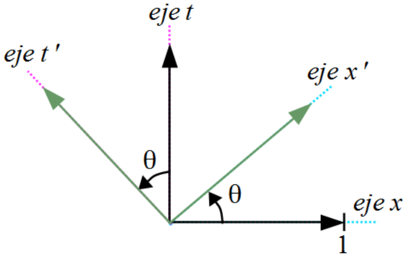
- (3) Transformación euclídea: esencialmente,



- Matemáticamente, las transformaciones de coordenadas generan el "grupo ortogonal" o de rotaciones: transformaciones lineales que preservan la distancia $\sqrt{t^2 + x^2 + y^2 + z^2}$

Solución del ejercicio (3)

- (3) Transformación euclídea: esencialmente,



- Matemáticamente, las transformaciones de coordenadas generan el "grupo ortogonal" o de rotaciones: transformaciones lineales que preservan la distancia $\sqrt{t^2 + x^2 + y^2 + z^2}$ $\rightsquigarrow$ ...pero DESCARTADA

Solución del ejercicio (y 4)

- (4) Transformación de Lorentz: esencialmente,

$$\begin{aligned} t' &= \cosh\theta \cdot t + \sinh\theta \cdot x \\ x' &= \sinh\theta \cdot t + \cosh\theta \cdot x \end{aligned}$$

$(\cosh\theta := (e^{\theta} + e^{-\theta})/2; \sinh\theta := (e^{\theta} - e^{-\theta})/2)$

Solución del ejercicio (y 4)

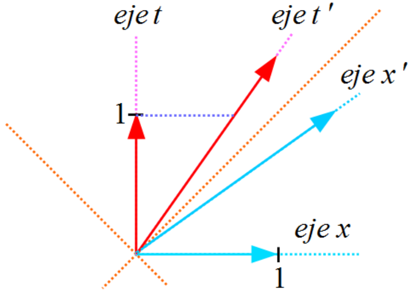
- (4) Transformación de Lorentz: esencialmente,

$$\begin{aligned} t' &= \cosh\theta \cdot t + \sinh\theta \cdot x \\ x' &= \sinh\theta \cdot t + \cosh\theta \cdot x \end{aligned}$$

$(\cosh\theta := (e^{\theta} + e^{-\theta})/2; \sinh\theta := (e^{\theta} - e^{-\theta})/2)$

- La coordenada temporal se mezcla con las otras pero sigue siendo "temporal" ($\cosh\theta > 0$, al crecer t también crece t') $\rightsquigarrow$ CONSISTENTE

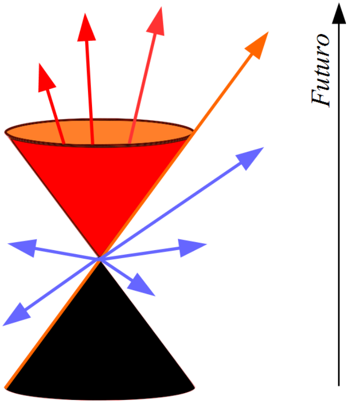
Solución del ejercicio (4)



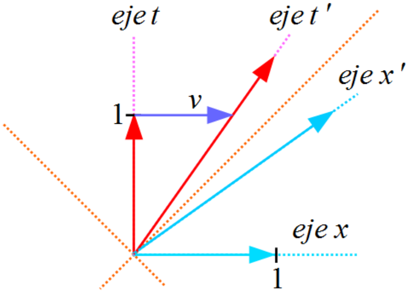
- Matemáticamente, las transformaciones de coordenadas generan el "grupo de Lorentz" transformaciones lineales que preservan la "distancia" $\sqrt{|-t^2+x^2+y^2+z^2|}$

Solución del ejercicio (4)

- Puntos a 0 "distancia" $\sqrt{|-t^2+x^2+y^2+z^2|}$: conos (de luz)



Solución del ejercicio (4)



- ¡Hay una velocidad absoluta máxima (e inalcanzable) entre SRI $c = 1$!

Conclusión

- Tenemos sólo 4 modelos de e.t. compatibles con la existencia de SRI.

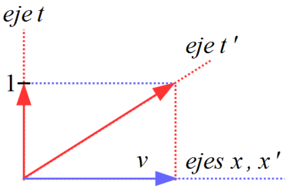
Conclusión

- Tenemos sólo 4 modelos de e.t. compatibles con la existencia de SRI.
- 2 no razonables, 2 sí

Conclusión

E. t. Galileo-Newton (Mecánica Clásica):

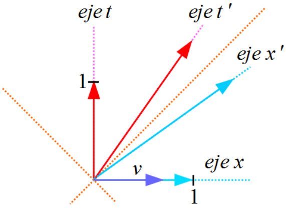
- Tiempo absoluto: $t' = t$ para todo SRI
- Espacio absoluto $t = 0$ (o $t =$ constante) dotado de una distancia $d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ (prod. escalar eucl.)
- Velocidades relativas arbitrarias entre SRI.



Conclusión

E.t. Lorentz-Minkowski (Relatividad Especial):

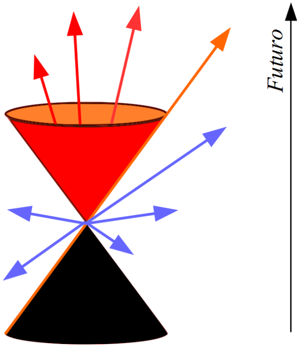
- Coordenada temporal dependiente del SRI: hay "tiempo" y "espacio" (con su distancia euclídea) pero no absolutos
- La "distancia" natural $\sqrt{|-t^2+x^2+y^2+z^2|}$ (prod. escalar lorentziano)



Conclusión

E.t. Lorentz-Minkowski (Relatividad Especial):

- Hay un límite $c = 1$ a las velocidades relativas entre SRI $\leftrightsquigarrow$ "conos de luz"



Lorentz-Minkowski vs Galileo-Newton

Preferencia por Lorentz-Minkowski:

- La velocidad c la propagación de cualquier **onda en el vacío** (luz) debe ser
  - *finita* (¿cómo se puede propagar algo a velocidad infinita?) e
  - *igual para todos los SRI* (la velocidad de propagación depende del vacío, que es "el mismo" para todos los SRI)

Lorentz-Minkowski vs Galileo-Newton

Preferencia por Lorentz-Minkowski:

- La velocidad c la propagación de cualquier **onda en el vacío** (luz) debe ser
  - *finita* (¿cómo se puede propagar algo a velocidad infinita?) e
  - *igual para todos los SRI* (la velocidad de propagación depende del vacío, que es "el mismo" para todos los SRI)
- ¡Se midió así!: experimento de Michelson Morley

Lorentz-Minkowski vs Galileo-Newton

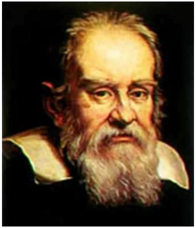
Preferencia por Lorentz-Minkowski:

- La velocidad c la propagación de cualquier **onda en el vacío** (luz) debe ser
  - *finita* (¿cómo se puede propagar algo a velocidad infinita?) e
  - *igual para todos los SRI* (la velocidad de propagación depende del vacío, que es "el mismo" para todos los SRI)
- ¡Se midió así!: experimento de Michelson Morley

Sólo Lorentz-Minkowski puede modelarlo
(Daremos razón otra desde el punto de vista puramente matemático)

Protagonistas

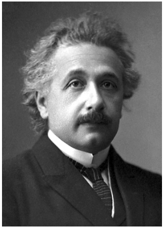
Euclides
h 325-265 aC



G. Galilei
1564-1642

I. Newton
1642-1726

Protagonistas



A. Einstein
(1879-1955)

H. Lorentz
(1853-1928)

Protagonistas

H. Minkowski
(1864-1909)

Segunda parte

PARTE II: Espacios y e.t. curvados

- Coordenadas arbitrarias
- Espacios curvados
- Espacio-tiempos curvados
- Newton frente a Leibniz

Un paso más allá

- Los SRI precisaban de cambios de coordenadas lineales

Un paso más allá

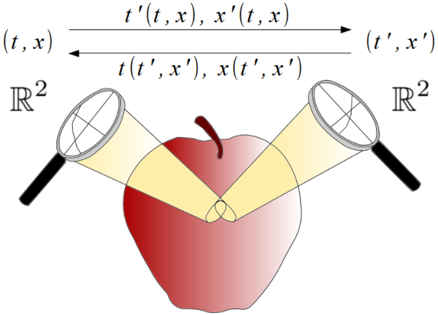
- Los SRI precisaban de cambios de coordenadas lineales
- ¿Tenemos seguridad de que existan?

Un paso más allá

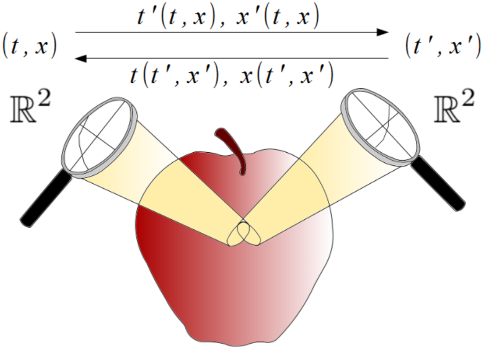
- Los SRI precisaban de cambios de coordenadas lineales
- ¿Tenemos seguridad de que existan?
- Estudio del e.t. sin necesidad de SRI: cambios de coordenadas arbitrarios (continuos y diferenciables)

Noción de "variedad"

"Variedad" de dim. n: espacio que se puede describir usando listas de *n* coodenadas, con cambios de coordenadas arbitrarios (aplicaciones diferenciables)

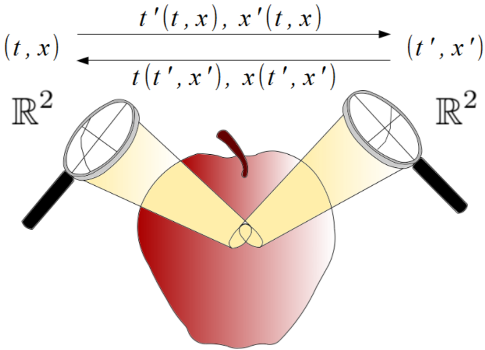


Noción de “variedad”



- Describen todo tipo de sistemas (mecánicos, termodinámicos, económicos...)

Noción de "variedad"



- Describen todo tipo de sistemas (mecánicos, termodinámicos, económicos...)
- Se estudian "intrínsecamente"

Variedad riemanniana

Cambios de coordenadas arbitrarios (diferenciables):

- Permiten definir velocidades de curvas y, en cada punto p, un "espacio tangente"

Variedad riemanniana

Cambios de coordenadas arbitrarios (diferenciables):

- Permiten definir velocidades de curvas y, en cada punto p, un "espacio tangente"
- **No** permiten calcular **aceleraciones** en general

Variedad riemanniana

Cambios de coordenadas arbitrarios (diferenciables):

- Permiten definir velocidades de curvas y, en cada punto p, un "espacio tangente"
- **No** permiten calcular **aceleraciones** en general

Variedad riemanniana (espacio curvado): en cada espacio tangente ponemos una distancia euclídea d_p (*métrica de Riemann*)

Variedad riemanniana

Cambios de coordenadas arbitrarios (diferenciables):

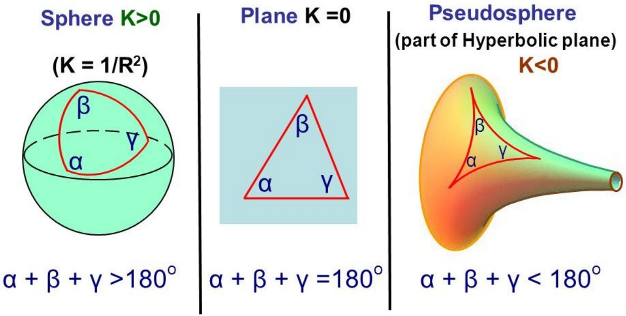
- Permiten definir velocidades de curvas y, en cada punto p, un "espacio tangente"
- **No** permiten calcular **aceleraciones** en general

Variedad riemanniana (espacio curvado): en cada espacio tangente ponemos una distancia euclídea d_p (*métrica de Riemann*)

- Permiten medir (intrínsecamente) longitudes, distancias aceleraciones
- Definir geodésicas: aceleración 0 (localmente minimizan la longitud del camino entre dos puntos)

Espacio curvado

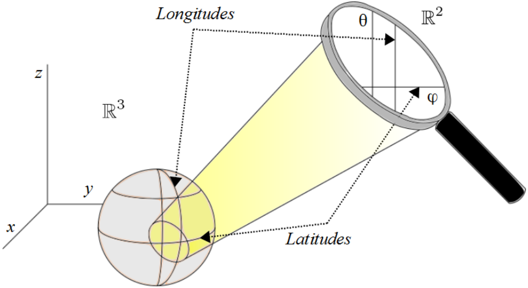
También **curvatura**: triángulos geodésicos



- $K > 0 \Rightarrow$ long circunf $< 2\pi r$, área círculo $< \pi r^2$...

Ejemplo: la esfera

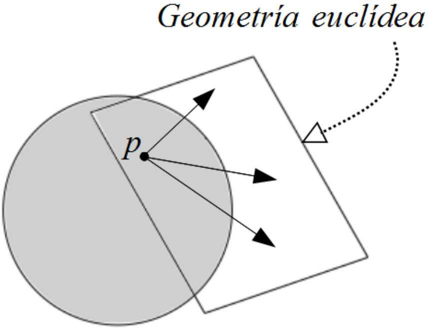
Esfera $\mathbb{S}^2$: variedad dim 2



- Coordenadas: (latitud, longitudinal); proyección a plano coordenado (x, y)...

Ejemplo: la esfera

En cada punto p se visualiza su plano tangente $T_p\mathbb{S}^2$



Ejemplo: la esfera

- Se pueden medir distancias, longitudes y aceleraciones de curvas intrínsecamente

Ejemplo: la esfera

- Se pueden medir distancias, longitudes y aceleraciones de curvas intrínsecamente
- Expansión de la esfera:

Ejemplo: la esfera

- Se pueden medir distancias, longitudes y aceleraciones de curvas intrínsecamente
- Expansión de la esfera:
  - Extrínseca: multiplicamos su radio por dos pasamos a otra esfera en $\mathbb{R}^3$ (¡MALO!)

Ejemplo: la esfera

- Se pueden medir distancias, longitudes y aceleraciones de curvas intrínsecamente
- Expansión de la esfera:
  - Extrínseca: multiplicamos su radio por dos pasamos a otra esfera en $\mathbb{R}^3$ (¡MALO!)
  - Intrínseca: se cambia cada d_p por $2d_p$... ¡se duplican las distancias en "la misma" esfera!

El e.t. como variedad

Espaciotiempo general: variedad M de dimensión 4 tal que **en cada $\mathbf{T_pM}$** ponemos:

El e.t. como variedad

Espaciotiempo general: variedad M de dimensión 4 tal que **en cada $\mathbf{T_pM}$** ponemos:

- Un e.t de Lorentz-Minkowski
  [Relatividad Especial, "distancia" tipo $\sqrt{|-t^2+x^2+y^2+z^2|}$]

El e.t. como variedad

Espaciotiempo general: variedad M de dimensión 4 tal que **en cada $\mathbf{T_pM}$** ponemos:

- Un e.t de Lorentz-Minkowski
  [Relatividad Especial, "distancia" tipo $\sqrt{|-t^2+x^2+y^2+z^2|}$]
  $\rightsquigarrow$ métrica de Lorentz g sobre M, e.t. Relatividad General

El e.t. como variedad

Espaciotiempo general: variedad M de dimensión 4 tal que **en cada $\mathbf{T_pM}$** ponemos:

- Un e.t de Lorentz-Minkowski
  [Relatividad Especial, "distancia" tipo $\sqrt{|-t^2+x^2+y^2+z^2|}$]
  $\rightsquigarrow$ métrica de Lorentz g sobre M, e.t. Relatividad General

¿Qué pasaría si pusiéramos...?

- Un e.t de Galileo-Newton:
  [Mecánica Clásica: tiempo absoluto ($t : T_pM \to \mathbb{R}$) y espacio absoluto (distancia euclídea en $t = 0$)]
  $\rightsquigarrow$ e.t. "leibniziano"

Diferencia matemática fundamental

DIFERENCIA MATEMÁTICA:

- E.t. relativista: la métrica de Lorentz g (como antes la de Riemann) permite hallar aceleraciones, curvaturas etc.

Diferencia matemática fundamental

DIFERENCIA MATEMÁTICA:

- E.t. relativista: la métrica de Lorentz g (como antes la de Riemann) permite hallar aceleraciones, curvaturas etc.
- E.t. leibniziano: **NO** posible (con solo esos elementos)

Diferencia matemática fundamental

DIFERENCIA MATEMÁTICA:

- E.t. relativista: la métrica de Lorentz g (como antes la de Riemann) permite hallar aceleraciones, curvaturas etc.
- E.t. leibniziano: **NO** posible (con solo esos elementos)

¡El modelo relativista también es mejor matemáticamente!

Una controversia (más) Newton/Leibniz

Diferencia matemática relacionada con una controversia histórica entre Newton y Leibniz

Una controversia (más) Newton/Leibniz

Diferencia matemática relacionada con una controversia histórica entre Newton y Leibniz

[Imagen: www.acmescience.com/2012/01/fight-1-newton-vs-leibniz/]

Argumentos

- Leibniz: los SRI de Newton no tenían sentido porque, desde el punto de vista de la geometría euclidiana tridimensional no podemos distinguir entre si un SRI está rotando o no

Argumentos

- Leibniz: los SRI de Newton no tenían sentido porque, desde el punto de vista de la geometría euclidiana tridimensional no podemos distinguir entre si un SRI está rotando o no
- Newton: la inclinación del agua en un cubo rotante permite distinguir si un SRI solidario con el cubo estaba en rotación o no.

¿De verdad tenía razón Newton?

El espacio y tiempo para Newton

¿era un e.t. de Galileo-Newton o una estructura leibniziana?

¿De verdad tenía razón Newton?

El espacio y tiempo para Newton
¿era un e.t. de Galileo-Newton o una estructura leibniziana?

- Tenía en mente el Galileo-Newton, pero las cosas no estaban definidas con precisión...

¿De verdad tenía razón Newton?

El espacio y tiempo para Newton
¿era un e.t. de Galileo-Newton o una estructura leibniziana?

- Tenía en mente el Galileo-Newton, pero las cosas no estaban definidas con precisión...
- No se describía conjuntamente espacio y tiempo, sino que el tiempo se veía más como un parámetro externo

¿De verdad tenía razón Newton?

El espacio y tiempo para Newton

¿era un e.t. de Galileo-Newton o una estructura leibniziana?

- Tenía en mente el Galileo-Newton, pero las cosas no estaban definidas con precisión...
- No se describía conjuntamente espacio y tiempo, sino que el tiempo se veía más como un parámetro externo
- No habría una buena explicación a cómo se relaciona el espacio en un instante y en uno posterior.

¿De verdad tenía razón Newton?

El espacio y tiempo para Newton

¿era un e.t. de Galileo-Newton o una estructura leibniziana?

- Tenía en mente el Galileo-Newton, pero las cosas no estaban definidas con precisión...
- No se describía conjuntamente espacio y tiempo, sino que el tiempo se veía más como un parámetro externo
- No habría una buena explicación a cómo se relaciona el espacio en un instante y en uno posterior.

...el modelo leibniziano parecería más próximo

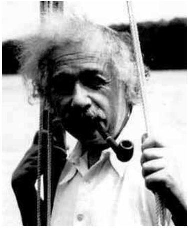
¡Un matemático le habría dado la razón a Leibniz!

Protagonistas

K. F. Gauss
1777-1855

B. Riemann
1826-1866

Protagonistas



A. Einstein
(1879-1955)

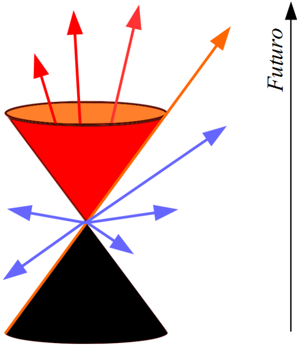
... y M. Grossmann
(1878-1936)

Tercera parte

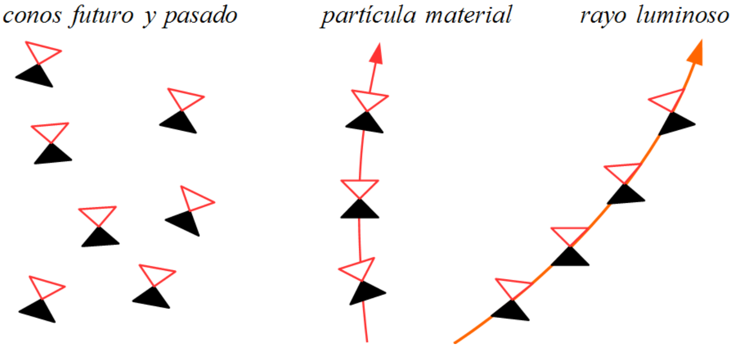
E.t. en Relatividad General

E.t. relativista:

- Variedad M dim 4
- Lorentz-Minkoski en cada T_pM $(\sqrt{|-t^2+x^2+y^2+z^2|})$
- En cada punto dos conos de luz uno "pasado" y otro "futuro"

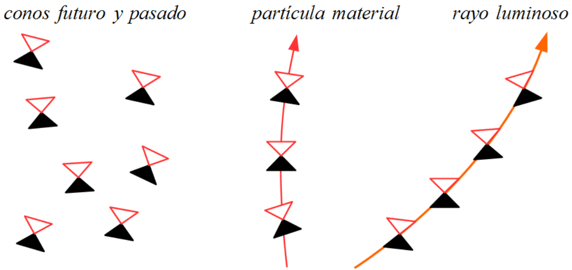


Movimiento de partículas / rayos de luz



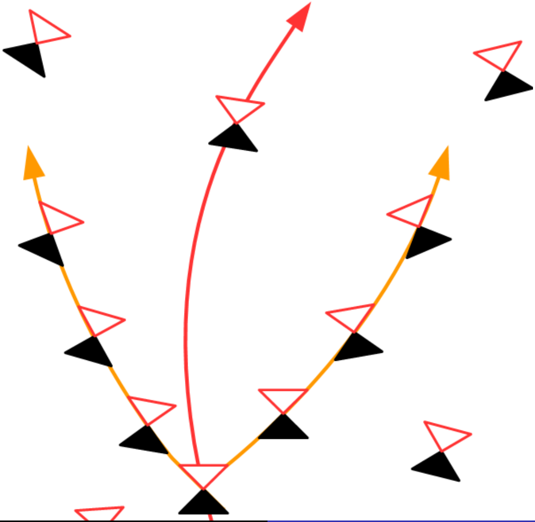
Curvas "causales": temporales o luminosas

Movimiento de partículas / rayos de luz

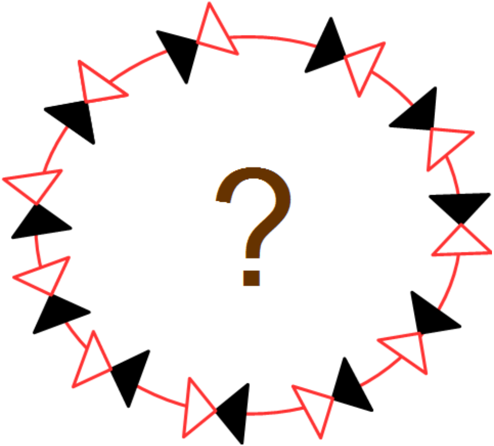


- Tiempo propio transcurrido: longitud de la curva
- Partículas en caída libre: geodésicas (curvas con aceleración 0)

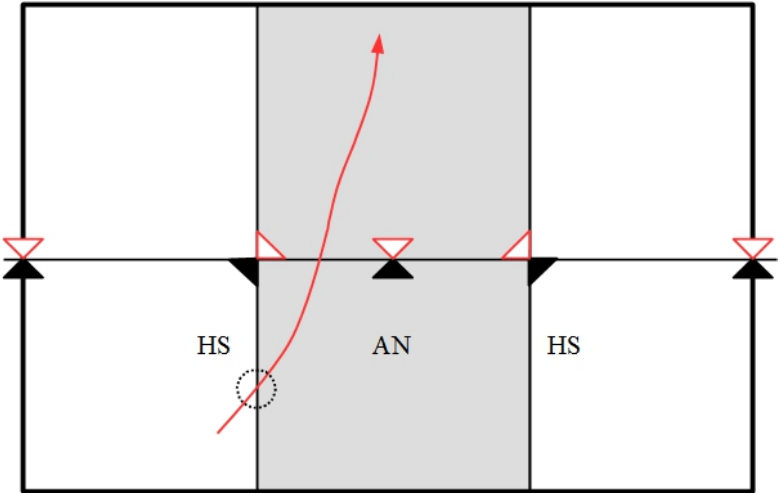
Futuro de un suceso



Viajar al pasado: curvas temporales cerradas

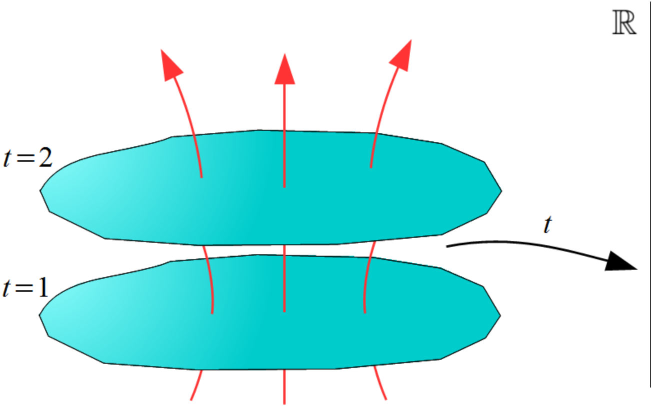


Conos tipo “agujero negro”



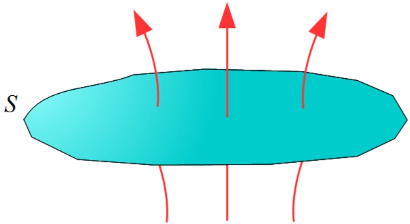
¿Qué es el tiempo?

Función $t : M \to \mathbb{R}$ que crece sobre todas las curvas causales.



¿Qué es el espacio?

Hipersuperficie de Cauchy: toda curva causal la corta exactamente una vez

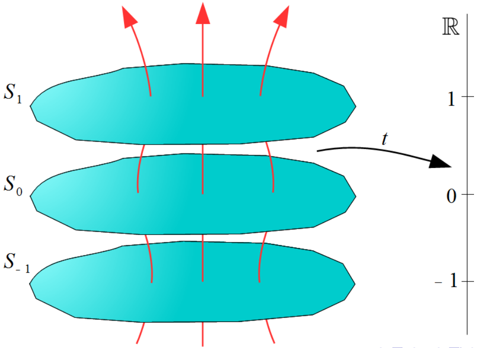


(no permite viajar al pasado)

Propiedad importante

Teorema (R Geroch; A.N Bernal & M. Sánchez)

Hipersuperficie de Cauchy $S \Rightarrow$ Función tiempo t tal que:
$S \equiv \{t = 0\}$ y cada t =constante es otra hip. Cauchy



E.t. físicamente razonable

E.t. físicamente relevantes:

1. Admite una hipersup. Cauchy S (hiperbolicidad global)
   $\rightsquigarrow$ Espacio y tiempo existen, aunque no sean únicos
   No se puede viajar al pasado...

E.t. físicamente razonable

E.t. físicamente relevantes:

1. Admite una hipersup. Cauchy S (hiperbolicidad global)
   $\rightsquigarrow$ Espacio y tiempo existen, aunque no sean únicos
   No se puede viajar al pasado...
2. Verifica la Ecuación de Einstein:

$$\mathrm{Ric} - \frac{1}{2}\mathrm{Sc}\cdot g \quad = \quad 8\pi T$$

Curvatura/Geometría determinada por materia/energía

(para materia/energía físicamente razonable)

Teorema 1: predictabilidad

Teorema (Y. Choquet-Bruhat, R.P. Geroch)

Los e.t que verifican las dos condiciones anteriores quedan **completamente determinados por** *datos en* **la hipersuperficie de Cauchy** S *(y sus primeras derivadas en* $t = 0$ *respecto a cualquier* t *son* $S \equiv \{t = 0\}$*).*

Teorema 1: predictabilidad

Teorema (Y. Choquet-Bruhat, R.P. Geroch)

Los e.t que verifican las dos condiciones anteriores quedan **completamente determinados por** *datos en* **la hipersuperficie de Cauchy** S *(y sus primeras derivadas en* $t = 0$ *respecto a cualquier* t *son* $S \equiv \{t = 0\}$*).*

$\rightsquigarrow$ determinismo total

Teorema 2: e.t. no eterno

Teorema (Hawking)

Si un e.t. admite una hipersuperficie de Cauchy S y verifica:

1. *S se expande ahora hacia el futuro con una expansión en todos sus puntos $\geq C(>0)$*
2. *La gravedad atrae siempre (condición sobre la curvatura y, via la Ec. Einstein, del tipo de materia)*

Entonces **la longitud de cualquier curva temp. cuando cruce** S **es** $< 1/C$.

Teorema 2: e.t. no eterno

Teorema (Hawking)

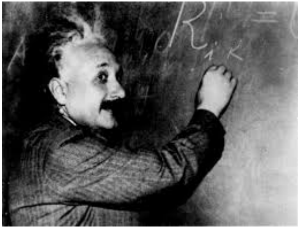
Si un e.t. admite una hipersuperficie de Cauchy S y verifica:

1. *S se expande ahora hacia el futuro con una expansión en todos sus puntos $\geq C(>0)$*
2. *La gravedad atrae siempre (condición sobre la curvatura y, via la Ec. Einstein, del tipo de materia)*

Entonces **la longitud de cualquier curva temp. cuando cruce** S **es** $< 1/C$.

$\rightsquigarrow$ ¡Nada ha podido existir un tiempo mayor que $1/C$!

Protagonistas



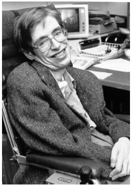
A. Einstein
(1879-1955)

D. Hilbert
(1862-1943)

Protagonistas

Y. Choquet-Bruhat
(1923—)

R.P Geroch
(1942—)



S.W Hawking
(1942—)

Referencia

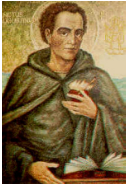
A.N. Bernal[1], M. Sánchez: Un paseo por las geometrías del espaciotiempo en el centenario de la Relatividad General, *La Gaceta de la RSME* (2015) 521-542.

[1]Autor también de las figuras exprofeso para esta presentación

Epílogo: algunas ideas de pensadores

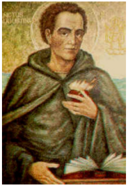
Epílogo: algunas ideas de pensadores

S. Agustín: ¿Qué es, pues el tiempo? Si nadie me lo pregunta, lo sé; si quiero explicarlo a quien me lo pide, no lo sé



Epílogo: algunas ideas de pensadores

S. Agustín: ¿Qué es, pues el tiempo? Si nadie me lo pregunta, lo sé; si quiero explicarlo a quien me lo pide, no lo sé



(**Einstein:** el tiempo es una ilusión, aunque persistente)

Epílogo: algunas ideas de pensadores

Escolásticos: tempus, aevum y aeternitas

S. Alberto Magno

Epílogo: algunas ideas de pensadores

Kant: tiempo y espacio, formas a priori de la sensibilidad (no se extraen de la experiencia sensible, sino que la hacen posible)

Epílogo: algunas ideas de pensadores

Newton: tiempo absoluto, verdadero y matemático fluye uniformemente... Espacio como *sensorio divino*

Muchas gracias por vuestra atención